2.9.4 Exponenciální rovnice I

Předpoklady: 2902

Pedagogická poznámka: Exponenciální rovnice a nerovnice jsou roztaženy do celkem sedmi hodin zejména proto, že jsou brány jako nácvik „výběru metody“. Nejprve si v šesti hodinách probereme jednotlivé typy rovnic (soustav, nerovnic) a triků na jejich řešení. Během této doby si studenti sestavují řešící arzenál (obdobu rozkladného arzenálu z kapitoly o rozkladu na součin - hodina 010708). Poslední hodina pak obsahuje promíchané různé typy příkladů, ve kterých by se studenti měli orientovat a vybrat k nim odpovídající metody řešení.

Pedagogická poznámka: Rychlost, se kterou budete postupovat, závisí na tom, jak rychle dokáží studenti řešit rovnice a jak dobře pracují s exponenty. U studentů vyučovaných podle klasických osnov (1. ročník rovnice, 2. ročník funkce) je mezi koncem rovnic a touto hodinu tak dlouhá prodleva, že hodně zapomenou a samotné počítání jim činí značné problémy.
Problémy s exponenty jsou menší, protože odmocniny předcházejí v obou pojetích poměrně těsně a studenti nemají tolik času na jejich zapomenutí.
Pokud postupujete pomaleji, než je v učebnici předepsáno, raději vynechejte soustavy případně i nerovnice, než abyste zmenšili počet rovnic, které budou studenti řešit při hodinách.

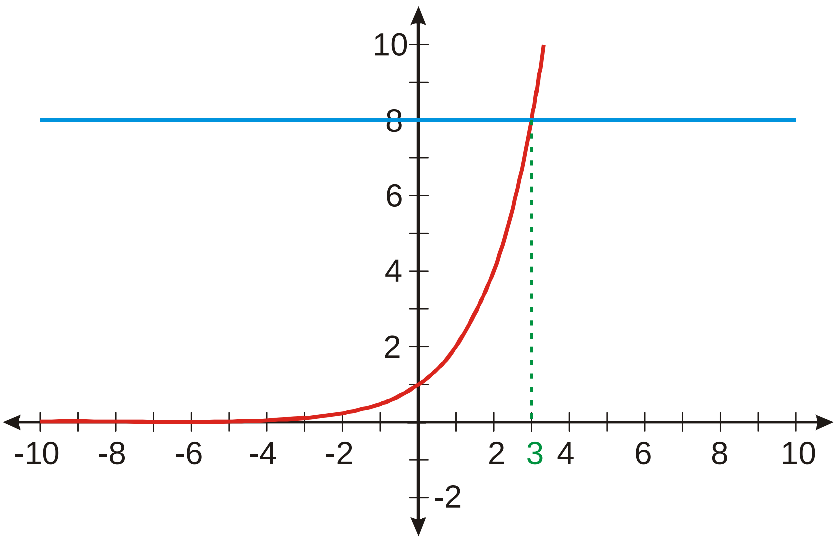
Copak asi bude typické pro exponenciální rovnice?
Stejně jako u exponenciálních funkcí se neznámá vyskytuje v exponentu.

Př. 1: Vyřeš exponenciální rovnici $2^x = 8$.

Jde to zpaměti, $x = 3$.
Zkouška vyjde:
$L = 2^3 = 8$
$P = 8$
$L = P$

Výsledek je správný. Musíme trochu upřesnit postup.

Grafické řešení: Do jednoho obrázku nakreslíme grafy dvou funkcí $y = 2^x$ a $y = 8$, x-ové souřadnice bodů, ve kterých se grafy protnou, jsou řešením rovnice.



Rovnice má jedno řešení $x = 3$.
Grafické řešení je trochu těžkopádné a není přesné (trojku jsme uhádli jenom proto, že si pamatujeme rovnost $2^3 = 8$).
Využijeme rovnost $2^3 = 8$ a dosadíme do rovnice $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3$.
Rozebereme vzniklou rovnici:

- Levá strana: $L = 2^x$ - hodnota funkce $y = 2^x$ pro neznámé číslo x
- Pravá strana: $P = 2^3$ - hodnota funkce $y = 2^x$ pro číslo 3

Obě strany se mají rovnat $\Rightarrow$ funkce $y = 2^x$ má pro x i pro 3 stejnou hodnotu.
Z grafu je vidět, že funkce $y = 2^x$ je prostá (ke každému y má pouze jedno x) $\Rightarrow$ pokud má funkce $y = 2^x$ pro x i pro 3 stejnou hodnotu (konkrétní y), musí se x a 3 rovnat (má pouze jednu hodnotu x, ze které jsme se k němu dostali) $\Rightarrow$ $x = 3$.

I všechny ostatní exponenciální funkce a^x jdou prosté $\Rightarrow$ postup můžeme použít obecně.

Pokud se podaří exponenciální rovnici upravit do tvaru $a^{výraz1} = a^{výraz2}$, můžeme přejít k rovnici $výraz1 = výraz2$. Protože funkce $y = a^x$ je prostá, je tato úprava ekvivalentní.

Pedagogická poznámka: Všechny další rovnice není možné řešit bez vzorců a pravidel pro úpravy exponentů mocnin. Upozorňuji studenty předem, ty, kteří s nimi mají příliš velké problémy, trestám pomocí mínusů.

Př. 2: Vyřeš rovnici $2 \cdot 2^x \cdot 8 = \dfrac{2^x \cdot 2^{x+1}}{8}$.

Zkusíme upravit rovnici do tvaru $2^{výraz1} = 2^{výraz2}$.

$2 \cdot 2^x \cdot 2^3 = \dfrac{2^x \cdot 2^{x+1}}{2^3}$

$2^{1+x+3} = 2^{x+x+1-3}$

$2^{x+4} = 2^{2x-2}$ Můžeme od rovnice $2^{výraz1} = 2^{výraz2}$ přejít k rovnici $výraz1 = výraz2$.

$x + 4 = 2x - 2$

$6 = x$ $K = \{6\}$

Předchozí postup budeme moci použít vždy, když rovnice obsahuje pouze součiny a podíly a bude tak možné převést každou ze stran na jedinou mocninu.

Př. 3: Vyřeš rovnici $\frac{3^x}{9^{x-2}} = \frac{27^x}{9 \cdot 3^{4-x}}$.

Zkusíme upravit rovnici do tvaru $3^{výraz1} = 3^{výraz2}$.

$$\frac{3^x}{\left(3^2\right)^{x-2}} = \frac{\left(3^3\right)^x}{3^2 \cdot 3^{4-x}}$$

$$\frac{3^x}{3^{2x-4}} = \frac{3^{3x}}{3^{6-x}}$$

$$3^{x-(2x-4)} = 3^{3x-(6-x)}$$

$3^{4-x} = 3^{4x-6}$ Můžeme od rovnice $3^{výraz1} = 3^{výraz2}$ přejít k rovnici $výraz1 = výraz2$.

$4 - x = 4x - 6$

$10 = 5x$

$x = 2$ $K = \{2\}$

Pedagogická poznámka: Kromě chyb při úpravách mocnin mívají studenti problémy i s tím, že zruší mocniny dříve, než rovnici upraví na tvar $a^{výraz1} = a^{výraz2}$. Někteří se vyhýbají mocninám ve jmenovateli a zbytečně si komplikují řešení zbytečným násobením.

Př. 4: Vyřeš rovnici $2 \cdot 2^x \cdot 4^{2-x} = \frac{8}{2^{3x+1}}$.

Zkusíme upravit rovnici do tvaru $2^{výraz1} = 2^{výraz2}$.

$$2 \cdot 2^x \cdot 4^{2-x} = \frac{8}{2^{3x+1}}$$

$$2^1 \cdot 2^x \cdot \left(2^2\right)^{2-x} = 2^3 \cdot \frac{1}{2^{3x+1}}$$

$$2^{x+1} \cdot 2^{4-2x} = 2^3 \cdot 2^{-3x-1}$$

$$2^{x+1+4-2x} = 2^{3-3x-1}$$

$2^{5-x} = 2^{2-3x}$ Můžeme od rovnice $2^{výraz1} = 2^{výraz2}$ přejít k rovnici $výraz1 = výraz2$.

$5 - x = 2 - 3x$

$2x = -3$

$x = -\frac{3}{2}$ $K = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $\frac{9 \cdot 3^x}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9^x}} = \frac{\sqrt[4]{3^x}}{27}$.

Zkusíme upravit rovnici do tvaru $3^{výraz1} = 3^{výraz2}$.

$$\frac{9\cdot 3^x}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9^x}}=\frac{\sqrt[4]{3^x}}{27}$$

$$\frac{3^2\cdot 3^x}{3^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{\left(3^2\right)^x}}=\frac{\left(3^x\right)^{\frac{1}{4}}}{3^3}$$

$$\frac{3^{x+2}}{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2x}{3}}}=\frac{3^{\frac{x}{4}}}{3^3}$$

$3^{x+2-\frac{1}{2}-\frac{2x}{3}}=3^{\frac{x}{4}-3}$ Můžeme od rovnice $3^{výraz1}=3^{výraz2}$ přejít k rovnici $výraz1=výraz2$.

$$x+2-\frac{1}{2}-\frac{2x}{3}=\frac{x}{4}-3 \qquad /\cdot 12$$

$$12x+24-6-8x=3x-36$$

$x=-54$ $\qquad K=\{-54\}$

Pedagogická poznámka: Objevují se problémy s řešením lineární rovnice vzniklé po přechodu od exponentů. Většinou připomínám, že nejvýhodnějším postupem je odstranění zlomků vynásobením číslem 12.

Př. 6: Vyřeš rovnici $\sqrt[x]{2\sqrt{8}}=\sqrt[x]{16}\cdot 2$.

Platí: $\sqrt[x]{2}=2^{\frac{1}{x}}$ $\Rightarrow$ přepíšeme rovnici pomocí racionálního exponentu.

$$\left(2\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(2^4\right)^{\frac{1}{x}}\cdot 2$$

$$\left(2\cdot 2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(2^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{4}{x}}\cdot 2$$

$2^{\frac{5}{2x}}=2^{\frac{4}{x}+1}$ Můžeme od rovnice $2^{výraz1}=2^{výraz2}$ přejít k rovnici $výraz1=výraz2$.

$$\frac{5}{2x}=\frac{4}{x}+1 \quad /\cdot 2x$$

$$5=8+2x$$

$$2x=-3$$

$x=-\frac{3}{2}$ $\qquad K=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Poznámka: Striktně vzato by předchozí příklad neměl mít řešení, protože odmocninu jsme si definovaly jako inverzní funkci k přirozené mocnině a můžeme tedy dělat jen *n*-tou odmocninu, kde *n* je přirozené číslo. Na druhou stranu po zavedení racionálních mocnitelů a vzorce $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ je možné dosazovat za *n* libovolné racionální číslo.

Př. 7: Vyřeš rovnici $\frac{27}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{4}{9}\left(\frac{9}{4}\right)^{x+2}$.

Problém: Zdá se, že na obou stranách máme různé základy mocnin.

Postřeh: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$ $\Rightarrow$ zkusíme vyjádřit obě strany rovnice jako mocniny o základu $\frac{3}{2}$.

$\frac{3^3}{2^3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}=\frac{2^2}{3^2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{x+2}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{3-x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+4}$

$3-x=-2+2x+4$

$1=3x$

$x=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $K=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

Př. 8: Vyřeš rovnici $\sqrt[\frac{1}{x}]{\frac{4^4}{16^x}}=4\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Pokusíme se přepsat všechno na mocniny dvou.

$\left(\frac{2^8}{2^{4x}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{x}}}=2^2\cdot 2^{-x}$

$\left(2^{8-4x}\right)^x=2^{2-x}$

$2^{8x-4x^2}=2^{2-x}$

$8x-4x^2=2-x$

$0=4x^2-9x+2$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot4\cdot2}}{2\cdot4}=\frac{9\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{9\pm7}{8}$

$x_1=\frac{9+7}{8}=2$ $\qquad$ $x_2=\frac{9-7}{8}=\frac{1}{4}$ $\qquad$ $K=\left\{\frac{1}{4};2\right\}$

Pedagogická poznámka: Následující příklad vyžaduje použití triku. Pět minut před koncem hodiny přeruším práci studentů na předchozích příkladech, abychom si ho ještě stihli projít.

Př. 9: Vyřeš rovnici: $3^x\cdot2^{x+1}=2\cdot36^{x+2}$.

Problém: Zdá se, že máme mocniny tří různých základů.
Nápad: Platí $2\cdot3=6$ $\Rightarrow$ zkusíme vše převést na mocniny 6.

$3^x\cdot2^x\cdot2=2\cdot\left(6^2\right)^{x+2}$

$6^x\cdot2=2\cdot6^{2x+4}$ $\quad$ $/:2$

$6^x=6^{2x+4}$ $\qquad$ Můžeme od rovnice $6^{výraz1}=6^{výraz2}$ přejít k rovnici $výraz1=výraz2$.

$x = 2x + 4$
$x = -4$ $\qquad K = \{-4\}$

Př. 10: Petáková:
strana 34/cvičení 1 a) b) d) e) h)

Shrnutí: Pokud se podaří exponenciální rovnici upravit do tvaru $a^{výraz1} = a^{výraz2}$, můžeme přejít k rovnici $výraz1 = výraz2$.